

ĐỀ THI HSG LỚP 8 – Trường NGÔ SĨ LIÊN
Vòng 1 (2015-2016)

Thời gian: 120 phút

Bài 1: (4 điểm) Cho biểu thức: $B = \frac{a^4 - 16}{a^4 - 4a^3 + 8a^2 - 16a + 16}$

- a) Rút gọn biểu thức B.
b) Tìm $a \in \mathbb{Z}$ để $B \in \mathbb{Z}$.

Bài 2: (4 điểm) Tìm x:

- a) $x^4 - 30x^2 + 31x - 30 = 0$
b) $|x-2| + |x-3| + |2x-8| = 9$

Bài 3: (4 điểm)

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của $M = \frac{x^2 - 2x + 2016}{x^2}$; với $x \neq 0$.

b) Cho 3 số a, b, c thỏa mãn $\begin{cases} a + b + c = 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 2016 \end{cases}$. Tính $A = a^4 + b^4 + c^4$.

Bài 4: (3 điểm) Cho $\triangle ABC$. Lấy $D \in BC$ sao cho $\frac{DB}{DC} = \frac{1}{2}$ và $O \in AD$ sao cho $\frac{OA}{OD} = \frac{3}{2}$. Gọi K là

giao điểm của BO và AC. Tính tỉ số $\frac{AK}{KC}$?

Bài 5: (3 điểm) Cho $\triangle ABC$ vuông cân tại A. Lấy $D \in BC$. Vẽ $DE \perp AB$ tại E, $DF \perp AC$ tại F. Chứng minh: $EA \cdot EB + FA \cdot FC = DB \cdot DC$

Bài 6: (2 điểm) Tìm nghiệm nguyên tố của phương trình: $x^2 - 2y^2 = 1$.

❁ ❁ **HẾT** ❁ ❁

ĐỀ THI HSG LỚP 8 – Trường NGÔ SĨ LIÊN
Vòng 1 (2015-2016)
HƯỚNG DẪN

Bài 1: (4 điểm) Cho biểu thức: $B = \frac{a^4 - 16}{a^4 - 4a^3 + 8a^2 - 16a + 16}$

a) Rút gọn biểu thức B.

$$\begin{aligned} B &= \frac{a^4 - 16}{a^4 - 4a^3 + 8a^2 - 16a + 16} = \frac{(a^2 - 4)(a^2 + 4)}{a^4 - 4a^3 + 4a^2 + 4a^2 - 16a + 16} \\ &= \frac{(a-2)(a+2)(a^2+4)}{a^2(a^2-4a+4)+4(a^2-4a+4)} = \frac{(a-2)(a+2)(a^2+4)}{(a-2)^2(a^2+4)} = \frac{a+2}{a-2} \end{aligned}$$

b) Tìm $a \in \mathbb{Z}$ để $B \in \mathbb{Z}$.

Ta có: $B = \frac{a+2}{a-2} = \frac{a-2+4}{a-2} = 1 + \frac{4}{a-2}$; DK: $a \neq 2$

Để $B \in \mathbb{Z}$ thì $4:(a-2) \Rightarrow a-2 \in U(4) \Rightarrow a-2 \in \{1; -1; 2; -2; 4; -4\} \Rightarrow a \in \{3; 1; 4; 0; 6; -2\}$ (thử lại thấy đúng)

Bài 2: (4 điểm) Tìm x:

a) $x^4 - 30x^2 + 31x - 30 = 0$

$$x^4 - 30x^2 + 31x - 30 = 0$$

$$(x^4 + x) - 30x^2 + 30x - 30 = 0$$

$$x(x^3 + 1) - 30(x^2 - x + 1) = 0$$

$$x(x+1)(x^2 - x + 1) - 30(x^2 - x + 1) = 0$$

$$(x^2 - x + 1)(x^2 + x - 30) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + x - 30 = 0 \text{ hay } x^2 - x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow (x+6)(x-5) = 0 \text{ hay } \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = 0 \text{ (vô lí)}$$

$$\Rightarrow x = -6 \text{ hay } x = 5$$

b) $|x-2| + |x-3| + |2x-8| = 9$

TH1: $x < 2$, phương trình trở thành :

$$-(x-2) - (x-3) - (2x-8) = 9$$

$$\Leftrightarrow -4x = -4$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ (nhận)}$$

TH2: $2 \leq x \leq 3$, phương trình trở thành:

$$(x-2)-(x-3)-(2x-8)=9$$

$$\Leftrightarrow -2x=0$$

$$\Leftrightarrow x=0 \text{ (loại)}$$

TH3: $3 < x < 4$, phương trình trở thành:

$$(x-2)+(x-3)-(2x-8)=9$$

$$\Leftrightarrow 0x=6 \text{ (vô lí)}$$

TH4: $x > 4$, phương trình trở thành :

$$(x-2)+(x-3)+(2x-8)=9$$

$$\Leftrightarrow 4x=22$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{11}{2} \text{ (nhận)}$$

$$\text{Vậy } S = \left\{ 1; \frac{11}{2} \right\}$$

Bài 3:(4 điểm)

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của $M = \frac{x^2 - 2x + 2016}{x^2}$; với $x \neq 0$.

$$M = 1 - \frac{2}{x} + \frac{2016}{x^2} = 2016 \left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{2016} \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{2016} \right) = 2016 \left[\left(\frac{1}{x^2} - 2 \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{2016} + \left(\frac{1}{2016} \right)^2 \right) + \frac{2015}{2016^2} \right]$$

$$= 2016 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2016} \right)^2 + \frac{2015}{2016} \geq \frac{2015}{2016}$$

$$\text{Vậy } M_{\min} = \frac{2015}{2016}. \text{ Dấu "}" xây ra khi } \frac{1}{x} - \frac{1}{2016} = 0 \Leftrightarrow x = 2016$$

b) Cho 3 số a, b, c thỏa mãn $\begin{cases} a+b+c=0 \\ a^2+b^2+c^2=2016 \end{cases}$. Tính $A = a^4 + b^4 + c^4$.

Ta có:

$$a+b+c=0 \Rightarrow a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)=0 \Leftrightarrow 2016+2(ab+bc+ca)=0 \Leftrightarrow ab+bc+ca=-1008$$

$$\Rightarrow (ab+bc+ca)^2 = (-1008)^2 \Leftrightarrow a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)=1008^2 \Leftrightarrow a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=1008^2$$

Ta có:

$$a^2+b^2+c^2=2016$$

$$\Rightarrow (a^2+b^2+c^2)^2 = 2016^2$$

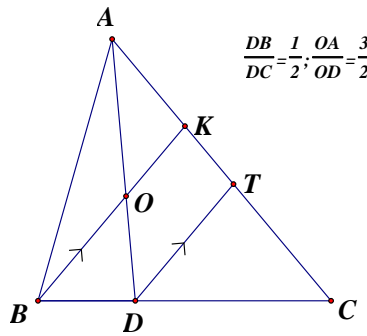
$$\Leftrightarrow a^4+b^4+c^4+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2) = 2016^2$$

$$\Leftrightarrow a^4+b^4+c^4+2(1008^2) = 2016^2$$

$$\Leftrightarrow a^4+b^4+c^4 = 2032128$$

Bài 4:(3 điểm) Cho $\triangle ABC$. Lấy $D \in BC$ sao cho $\frac{DB}{DC} = \frac{1}{2}$ và $O \in AD$ sao cho $\frac{OA}{OD} = \frac{3}{2}$. Gọi K là

giao điểm của BO và AC . Tính tỉ số $\frac{AK}{KC}$?



$$\frac{DB}{DC} = \frac{1}{2}; \frac{OA}{OD} = \frac{3}{2}$$

Từ D, vẽ đường thẳng song song với BK và cắt AC tại T.

Ta có: $\frac{DB}{DC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{DB}{1} = \frac{DC}{2} = \frac{DB+DC}{1+2} = \frac{BC}{3} \Rightarrow \frac{DB}{1} = \frac{BC}{3} \Rightarrow \frac{DB}{BC} = \frac{1}{3}$

Xét $\triangle ADT$, ta có: $\begin{cases} OK \parallel DT (BK \parallel DT, O \in BK) \\ O \in AD, K \in AT \end{cases}$

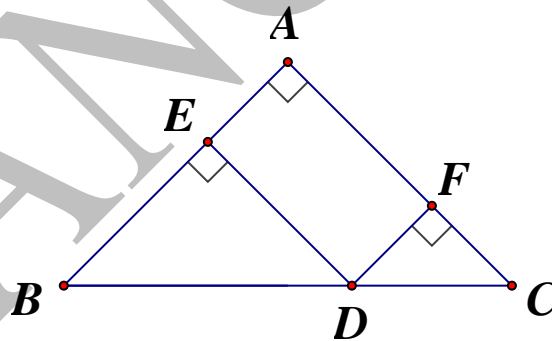
$\Rightarrow \frac{AK}{KT} = \frac{OA}{OD}$ (định lí Thales) mà $\frac{OA}{OD} = \frac{3}{2}$ nên $\frac{AK}{KT} = \frac{3}{2}$ (1)

Xét $\triangle CBK$, ta có: $\begin{cases} DT \parallel BK \text{ (cách vẽ)} \\ D \in BC, T \in KC \end{cases}$

$\Rightarrow \frac{KT}{KC} = \frac{DB}{BC}$ (định lí Thales) mà $\frac{DB}{BC} = \frac{1}{3}$ nên $\frac{KT}{KC} = \frac{1}{3}$ (2)

Từ (1) và (2), ta suy ra: $\frac{AK}{KT} \cdot \frac{KT}{KC} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{AK}{KC} = \frac{1}{2}$

Bài 5:(3 điểm) Cho $\triangle ABC$ vuông cân tại A. Lấy $D \in BC$. Vẽ $DE \perp AB$ tại E, $DF \perp AC$ tại F.
 Chứng minh: $EA \cdot EB + FA \cdot FC = DB \cdot DC$



Xét $\triangle ABC$, ta có: $ED \parallel AC$

$\Rightarrow \begin{cases} \frac{EA}{AB} = \frac{DC}{BC} \\ \frac{EB}{AB} = \frac{DB}{BC} \end{cases}$ (định lí Thales)

$\Rightarrow \frac{EA}{AB} \cdot \frac{EB}{AB} = \frac{DC}{BC} \cdot \frac{DB}{BC} \Rightarrow EA \cdot EB = DB \cdot DC \cdot \frac{AB^2}{BC^2}$ (1)

Chứng minh tương tự, ta có: $FA \cdot FB = DB \cdot DC \cdot \frac{AC^2}{BC^2}$ (2)

$$\text{Từ (1) và (2), ta có: } EA \cdot EB + FA \cdot FC = DB \cdot DC \left(\frac{AB^2}{BC^2} + \frac{AC^2}{BC^2} \right) = DB \cdot DC \left(\frac{AB^2 + AC^2}{BC^2} \right) = DB \cdot DC$$

(vì $AB^2 + AC^2 = BC^2$ (định lý Pitago trong $\triangle ABC$ vuông tại A))

Bài 6:(2 điểm) Tìm nghiệm nguyên tố của phương trình: $x^2 - 2y^2 = 1$.

Cách 1:

$$x^2 - 2y^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 2y^2 \Leftrightarrow (x-1)(x+1) = 2y^2$$

$\Rightarrow (x-1)(x+1):2 \Rightarrow$ trong 2 số $(x-1)$ và $(x+1)$ phải có ít nhất 1 số chẵn. (1)

Ta có: $(x-1)+(x+1)=2x$ là 1 số chẵn $\Rightarrow (x-1)$ và $(x+1)$ có cùng tính chẵn lẻ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow (x-1)$ và $(x+1)$ cùng chẵn.

$$\Rightarrow \begin{cases} (x-1):2 \\ (x+1):2 \end{cases} \Rightarrow (x-1)(x+1):4 \Rightarrow 2y^2:4 \Rightarrow y^2:2 \Rightarrow y=2 \text{ (vì } y \text{ nguyên tố)}$$

Thế $x=2$ vào $x^2 - 2y^2 = 1$, ta được: $x^2 - 2 \cdot 2^2 = 1 \Rightarrow x=3$ (vì x nguyên tố)

Vậy cặp nghiệm nguyên tố duy nhất của phương trình là $x=3; y=2$.

Cách lý luận khác của cách 1:

$$x^2 - 2y^2 = 1 \Rightarrow x \text{ là số lẻ và } 2y^2 = x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$$

Vì x là số lẻ nên $\begin{cases} x-1 \text{ chẵn} \\ x+1 \text{ chẵn} \end{cases} \Rightarrow (x-1)(x+1):4 \Rightarrow 2y^2:4 \Rightarrow y^2:2$. Mà y nguyên tố. Nên $y=2$

Cách 2:

$$x^2 - 2y^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 2y^2 \Leftrightarrow (x-1)(x+1) = 2y^2 \Leftrightarrow (x-1)x(x+1) = 2xy^2$$

mà $(x-1)x(x+1)$ là 3 số tự nhiên liên tiếp nên $(x-1)x(x+1):6$

Do đó: $2xy^2:6 \Rightarrow xy^2:3$

TH1: $x:3 \Rightarrow x=3$ (vì x nguyên tố)

Thế $x=3$ vào $x^2 - 2y^2 = 1$, ta được: $3^2 - 2 \cdot y^2 = 1 \Rightarrow y=2$ (nhận vì y nguyên tố)

TH2: $y:3 \Rightarrow y=3$ (vì y nguyên tố)

Thế $y=3$ vào $x^2 - 2y^2 = 1$, ta được: $x^2 - 2 \cdot 3^2 = 1 \Rightarrow x^2 = 29$ loại (vì x nguyên tố)

Vậy cặp nghiệm nguyên tố duy nhất của phương trình là $x=3; y=2$.

🌸 🌸 **HẾT** 🌸 🌸